平成２９年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

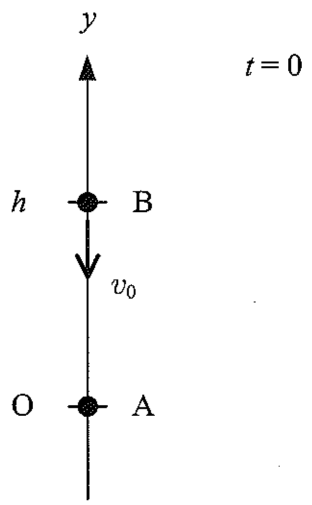
３．問題は全部で３問あります。３問すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。

４．解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

図のように，鉛直上向きを正とする y 軸がある。はじめ，質量 m の小球Aが原点Oにあり，また同じ質量の小球Bが原点Oより h だけ上にある。時刻 $t=0$ に，小球Aは静かに落下し，小球Bは初速 v_0 で落下しはじめ，しばらくすると小球Aと小球Bは衝突した。ここで，h は正とし，重力加速度の大きさを g とする。



まずは，空気抵抗を無視できるものとして，以下の問いに答えよ。

1. 小球Aと小球Bの運動方程式をそれぞれ書け。

2. 衝突するまでの小球Aと小球Bの速度と位置を時刻 t の関数としてそれぞれ求めよ。

3. 小球Aと小球Bが衝突する時刻を求めよ。

次に，速度に比例する空気抵抗がある場合を考える。小球Aと小球Bの空気抵抗の比例係数をkとして，以下の問いに答えよ。ただし，kは正である。

4. 小球Aと小球Bの運動方程式をそれぞれ書け。
5. 問4の運動方程式を解いて，衝突するまでの小球Aと小球Bの速度を時刻tの関数としてそれぞれ求めよ。

小球Bの初速v_0を調整したところ，小球Bが常に一定の速度で落下した。

6. このときの小球Bの初速v_0を求めよ。
7. 衝突するまでの小球Aと小球Bの位置を時刻tの関数としてそれぞれ求めよ。
8. 小球Aと小球Bが衝突する時刻を求めよ。また，小球Aと小球Bが衝突するためのhの条件を示せ。

II. 次の1，2の設問に答えよ。

1. 図1のように，正方形の金属板2枚からなる平行板コンデンサーがある。金属板の一辺の長さはL，金属板の間隔はdであり，コンデンサーの内部は真空である。また，Lはdに比べて十分に大きく，コンデンサーの端での電場の乱れは無視できるものとする。上側の金属板に電荷Qを，下側の金属板に電荷$-Q$を蓄えた。真空の誘電率をε_0とし，以下の問いに答えよ。

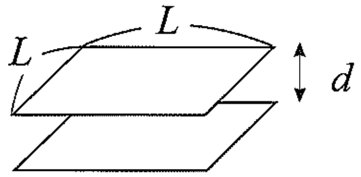


図1

a. コンデンサー内の電場の大きさEを求めよ。

b. コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを求めよ。

c. コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを電場のエネルギーと解釈する。コンデンサー内の電場の持つ単位体積あたりのエネルギーを，Eとε_0を用いて表せ。

次に，平行板コンデンサー中に誘電率ε_1，およびε_2の誘電体を挿入した。このとき，図2に表すコンデンサーの断面のように，2種類の誘電体の境界は金属板と平行になっており，誘電率ε_1，ε_2の誘電体の厚さはともに$d/2$であるとする。

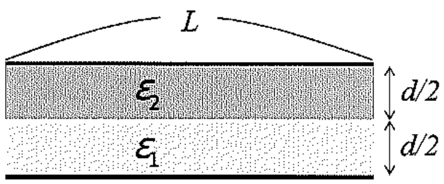


図2

d. 誘電率ε_1，ε_2の誘電体中の電場の大きさを，それぞれE_1, E_2とする。誘電体の境界面にガウスの法則を用いて，$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$の関係が成り立つことを示せ。

e. 上下の金属板の電荷は，それぞれQ，$-Q$のままであるとし，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを求めよ。

2. 図３のように直交座標があり，その z 軸上に置かれた無限に長い導線に定常電流が流れている。電流の向きは z 軸方向の正の向きで，その大きさは I であるとする。真空の透磁率を μ_0 とし，以下の問いに答えよ。

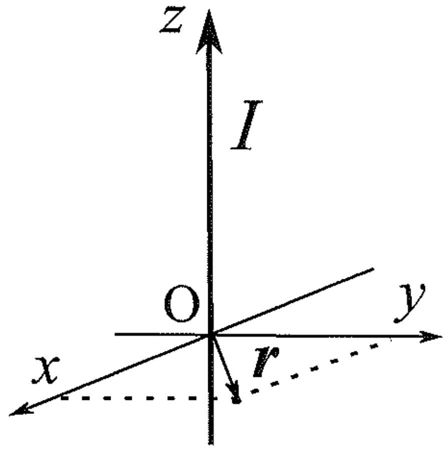


図３

a. アンペールの法則を用いて，位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ での磁束密度の大きさを求めよ。

b. この電流が位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ に作るベクトルポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A} = (0, 0, -k \log r)$$

と表わされることが知られている。ただし，$r = |\boldsymbol{r}|$ であり，k は定数である。このベクトルポテンシャルより，位置 $\boldsymbol{r}$ での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求め，定数 k を μ_0, I を用いて表わせ。

c. 問 b で求めた磁束密度が，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ を満たすことを計算で示せ。 また，一般に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対し，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ が成り立つ。この式の物理的な意味を簡潔に述べよ。

III. 次の 1, 2 の設問に答えよ。

1. 以下のように行列 A, B, C を定義する。

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, I を 3×3 の単位行列とする。ここで, i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である。

a. $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し, 定数 k を求めよ。

b. A の固有値を求めよ。

c. 一般に, 正方行列 M の指数関数 e^M は, 無限級数 $e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}M^n$ で定義される。α を実定数としたとき,

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

となることを示せ。

d. ベクトル $\vec{v}(\phi)$ を $\vec{v}(\phi) = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する。このとき, $e^{i\alpha C}\vec{v}(\phi) = \vec{v}(\phi')$ と書けることを示し, ϕ' を求めよ。 ただし, ϕ と ϕ' は実定数である。

2. 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{5t} \tag{1}$$

の一般解を求める。

a. 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

の基本解を求めよ。

b. 式 (1) の特解を $y(t) = Ce^{\alpha t}$ とおいて, 定数 C と α を求めよ。

c. 式 (1) の一般解を求めよ。

次に, 変数係数の 2 階微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = x^5 \tag{2}$$

の一般解を求める。

d. $x = e^t$ とおくことで, 式 (2) が 式 (1) に書き換えられることを示せ。

e. 式 (2) の一般解を求めよ。