平成２８年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

３．問題は全部で３問あります。３問すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。

４．解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

長さ l の質量の無視できる糸でつながれた，ともに質量が m の質点1と質点2が滑らかな机の上に置かれている。糸はたるむことはなく，またのびることもないとする。また糸と机との間の摩擦も考えない。図1のように質点2を机の端に持っていき，静かに離したところ，図2のように鉛直下向きに落下した。図2のように机に沿って水平方向右向きに x 軸を，机の端から鉛直上向きに y 軸をとり，机の端を原点Oとする。質点1と質点2の位置座標をそれぞれ (x_1, y_1), (x_2, y_2) とする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

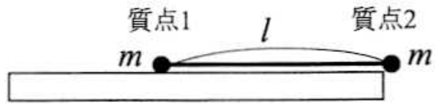


図 1

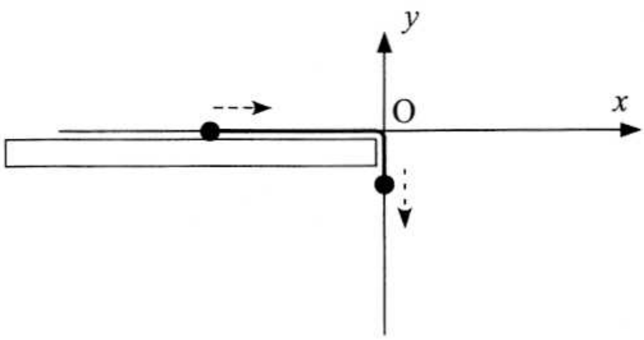


図 2

まず，質点1が机の端に達するまでの運動について考える。質点2を離したときを $t = 0$ とする。

1. 糸の張力の大きさを T として質点1と質点2の運動方程式をそれぞれ書け。

2. 質点1と質点2について，それぞれの位置座標の関係を書け。

3. 糸の張力の大きさ T を求めよ。

4. 質点1が机の端に達した瞬間の，質点1の速さ v_0 を求めよ。

次に，質点 1 が机から離れた後の，糸でつながれた質点 1 と質点 2 からなる質点系の運動について考える。このときこの質点系は剛体として扱えるものとする。以下の問いでは質点 1 が机の端に達した瞬間を $t=0$ とし，解答に問 4 の v_0 を用いてよい。

5. $t=0$ での，この質点系の重心の位置座標 (x, y) と速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ を求めよ。

6. この質点系の重心の位置座標を時間 t の関数として求めよ。

7. この質点系の重心のまわりの慣性モーメント I_0 を求めよ。

8. $t=0$ での，この質点系の重心まわりの角運動量の大きさを求めよ。

II.

1. 図 1 のように真空中の無限に長い直線 L 上に一様な線密度 λ で電荷が分布しているとき，そこから距離 r の点 P における電場について以下の問いに答えよ。ただし真空の誘電率を ϵ_0 とする。

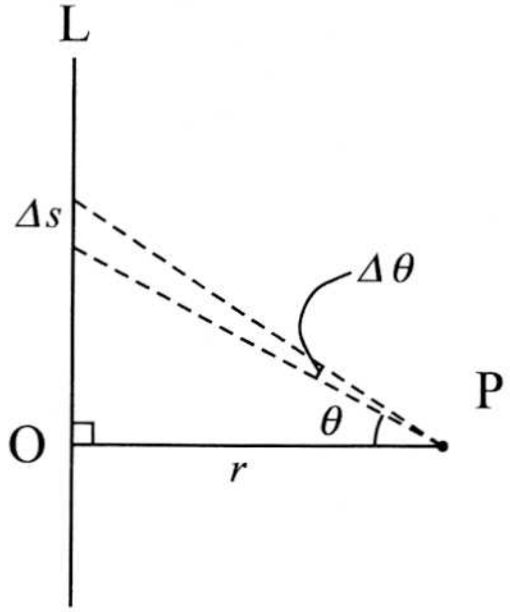


図 1

a. L 上の長さ Δs の微小区間について考える。P から L へおろした垂線と P から微小区間へ結んだ線分がなす角を θ とするとき，微小区間にある電荷が P につくる電場の大きさを求めよ。

b. Δs を θ の微小量 $\Delta\theta$ で表せ。ただし，$\Delta\theta$ の二次より高次の項は 0 と近似してよいとする。

c. 微小区間がつくる電場を直線全体について積分し，P における電場の L に対して垂直な成分と平行な成分をそれぞれ求めよ。

この問題を図2のようなLを中心軸とした半径r，高さhの円柱状の閉曲面Sにおけるガウスの法則を用いて考える。

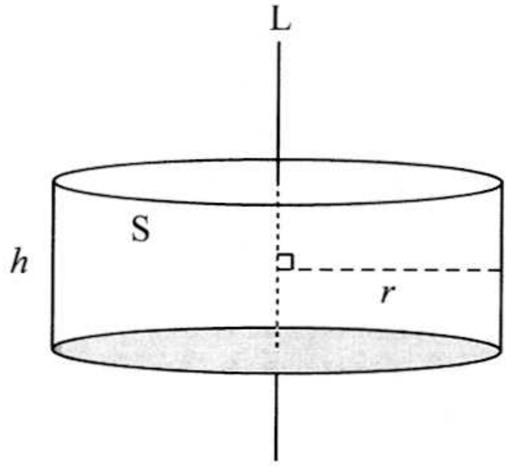


図2

d. Lから距離rの点での電場の向きを示せ。

e. Lから距離rの点での電場の大きさを$E(r)$とするとき，S上における電場の面積分

$$\int_S (\vec{E}\cdot\vec{n})dS$$

を求めよ。ここで，$\vec{n}$はSの法線ベクトルである。

f. Sに囲まれた領域内にある電荷の総和を求めよ。

g. 問d，eの結果を用いて$E(r)$を求めよ。

2. 静電ポテンシャル$\phi(x,y,z)$が以下のように表されるときを考える。

$$\phi(x,y,z) = k\log(r) + C, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad (k, C \text{ は定数})$$

以下の問いに答えよ。

a. 上に示した$\phi(x,y,z)$の式を用いて電場が$\vec{E} = \left(-\frac{kx}{r^2}, -\frac{ky}{r^2}, 0\right)$となることを示せ。

b. $\vec{E}$の回転$\vec{\nabla}\times\vec{E}$を求めよ。

c. z軸上$(x=y=0)$以外の点で，$\vec{E}$の発散$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$を求めよ。

III.

1. 三角関数に関する以下の問いに答えよ。

a. e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ。

b. オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つことを，問 a のテイラー展開の結果を用いて示せ。

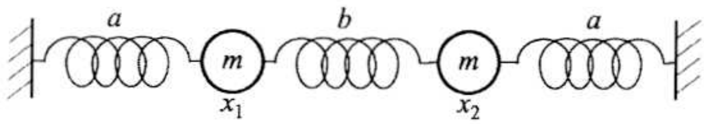
c. 任意の正の整数 n について，次の恒等式が成り立つことを示せ。

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

d. 問 c の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ。

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \\
\sin(3\theta) &= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta
\end{aligned}$$

2. 図のように質量 m の2つのおもりが，3つのバネでつながれて直線上を運動している。



おもりのつり合いの位置からのずれ x_1，x_2 は，次のような運動方程式にしたがっている。ただし，a と b はバネ定数である。

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -ax_1 + b(x_2 - x_1), \quad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -ax_2 - b(x_2 - x_1)$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ として，上の運動方程式を行列の形で書くと，

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv K\vec{x} \ ,$$
$$K = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -a-b \end{pmatrix}$$

となる。この連立微分方程式を行列 K を対角化することによって解きたい。以下の問いに答えよ。

a. $K\vec{u} = \lambda\vec{u}$ を満たす，K の固有値 λ と規格化された固有ベクトル $\vec{u}$ を求めよ。

b. 問 a で得られた2つの固有ベクトルの内積がゼロであることを示せ。

c. 固有値を λ_1，λ_2 として，$VKV^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となるような 2×2 行列 V を，問 a で得られた固有ベクトル $\vec{u}$ から構成せよ。

d. $V\vec{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと，運動方程式が，$m\dfrac{d^2y_i}{dt^2} = \lambda_i y_i \ (i = 1, 2)$ になることを示せ。

e. y_1 と y_2 の運動方程式の一般解を求め，さらに，おもりの位置 x_1，x_2 の一般解を求めよ。(λ_1，λ_2 ではなく，a，b を用いよ。)