平成２６年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

1．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

2．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
　問題冊子１部，解答用紙４枚

3．問題は全部で３題あります。各解答用紙に受験番号を記入
　してください。

4．解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

5．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

1. 質量 m の物体が傾斜角 θ のなめらかな斜面上で，固定されたバネにつながれて斜面上を運動する。重力加速度の大きさを g，バネ定数を k，バネの自然長を L とする。バネの固定された位置を原点として斜面に沿って下向きに x 軸をとり，時刻 t における物体の位置を x とする。物体に抵抗力 $-\sqrt{km}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ が働いた場合の運動について，以下の問いに答えよ。

   a. 物体の運動方程式を示せ。

   b. 物体を斜面上の点 x_0 で静止させて静かに離すと，物体は静止し続けた。x_0 を求めよ。

   c. 静止した位置から，物体を x 軸方向に A だけ下方に引き，時刻 $t=0$ でゆっくり離すと物体は斜面上で振動した。時刻 t における位置 x を求めよ。

   d. 振動の周期を求めよ。

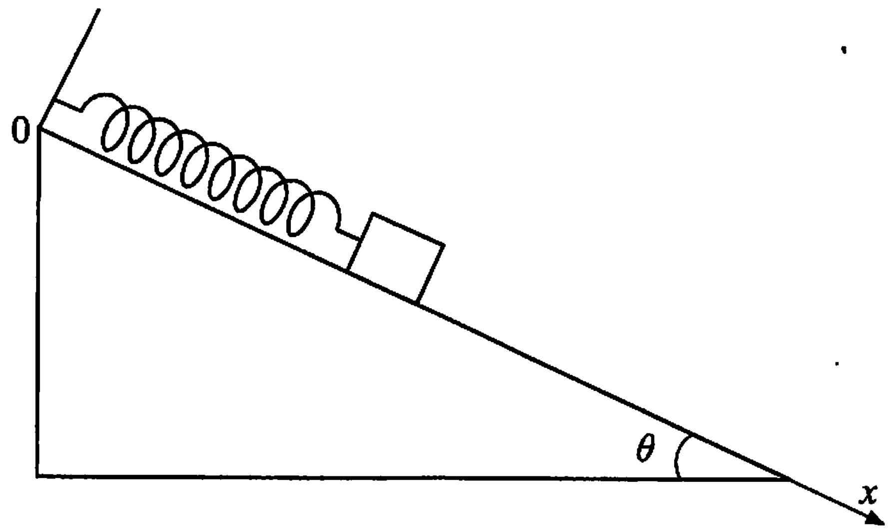

図 1

2. 図2のような半径a，全質量Mの密度も厚さも一様な円板状の滑車に糸をかけ，両側に質量m_{A}，m_{B}（$m_{\mathrm{A}} > m_{\mathrm{B}}$）の重りA，Bをつける。糸と滑車は滑らず，糸の質量および重りの空気抵抗，滑車の回転の摩擦は無視できるとして，以下の問いに答えよ。なお重力加速度の大きさはgとする。

a. 滑車の中心での滑車の慣性モーメントIを求めよ。

b. 糸の張力を，重りA側をS，B側をTとし，滑車の角速度はωとする。重りA，Bおよび滑車の回転の運動方程式をそれぞれ書け。ただし，滑車の慣性モーメントとしてIを用いても良い。

c. 糸の張力S，およびTを求めよ。

d. 滑車を静かに離した時刻をt=0としたとき，時刻tでの角速度ωを求めよ。

e. 時刻0からtまでに滑車の回転した角度θを求めよ。

f. 時刻0からtまでに張力がした仕事および時刻tにおける滑車の運動エネルギーをそれぞれ求めて，それらが等しいことを示せ。

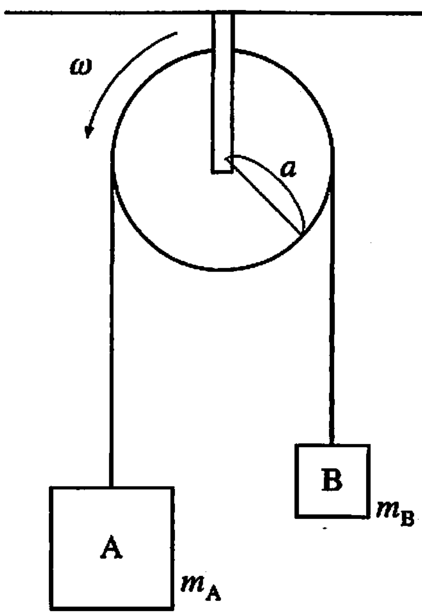

図2

II.

1. 単位長さ当りの巻き数 n, 半径 R, 長さ L のソレノイドコイルに電流 $I(t)$ を増加させながら流す。なお, 真空の透磁率を μ_0 とする。

   a. アンペールの法則を用い, ソレノイドコイル内部および外部に生じる磁束密度の大きさを求めよ。ただし, コイルの長さ L は十分大きく端の影響は無いものとする。

   b. 時刻 t, 位置 $\vec{r}$ における電場を $\vec{E}(\vec{r}, t)$, 回路の磁束を $\Phi(t)$ としたとき, 電磁誘導の法則を積分形で書け。

   c. ソレノイドコイルの内部および外部での誘導電場の大きさを求めよ。

2. 球座標系 (r, θ, φ) で静電ポテンシャルが, 正の定数 a および定数 A を用いて

$$\phi(\vec{r}) = A\frac{e^{-ar}}{r}$$

   で与えられている。このとき, 以下の問いに答えよ。なお, 真空の誘電率を ε_0 とする。また, 必要があれば公式

$$\nabla^2 f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \vec{i}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \vec{i}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

   を用いてよい。ただし, $\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi$ はそれぞれ r, θ, φ 方向の単位ベクトルである。

   a. 原点を除く空間での電荷密度および電荷を求めよ。

   b. 位置 $\vec{r}$ における電場を求めよ。

   c. 原点近傍に微小な球面を考え, これに積分形のガウスの法則を適用することで, 原点にある点電荷の値を求めよ。

III.

3次元空間上のベクトル $\vec{V}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\vec{V}'$ へ変換される。この関係を 3×3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\vec{V}' = U(\theta)\vec{V}$$

と書く。ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

1. 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ。

2. 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ。

3. 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2，K^3，および K^4 を求めよ。さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ。

4. 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される。ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である。問3の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ。