平成２３年度第１次募集新潟大学大学院自然科学研究科

博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

（専攻名）数理物質科学専攻

（試験実施単位名）Ａ１

専門科目（ 物　理　学 ）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で８ページある。（表紙は含まない。）

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，180 分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

［１］ 設問ＡとＢにそれぞれ答えよ。

Ａ． 質量m，角振動数ωの１次元調和振動子がある。時間をt，調和振動子の位置座標をxとして，以下の問いに答えよ。

(1) 調和振動子の運動方程式は，次のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

時刻$t=0$で位置がa，速度がvのとき，運動方程式の解を求めよ。

(2) 速度に比例する摩擦力が働くとき，運動方程式は，次のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\lambda\frac{dx}{dt} - m\omega^2 x$$

ここでλは正の定数であり，右辺の第一項は摩擦による抵抗力を表す。$\lambda<2\omega$ の場合について，運動方程式の一般解を求めよ。

B． 質量m，角振動数ωの2次元調和振動子のハミルトニアンHは，時間をt，平面極座標を(r, ϕ)，これらに共役な一般化運動量を(p_r, p_ϕ)として，次のようになる。

$$H = \frac{(p_r)^2}{2m} + \frac{(p_\phi)^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

以下の問いに答えよ。

(1) この系についてr，ϕ，p_r，およびp_ϕに対するハミルトンの正準運動方程式（正準方程式）をそれぞれ書け。

(2) $h \equiv r^2 \left|\frac{d\phi}{dt}\right|$で定義される面積速度$h$が保存することを示せ。

(3) $\frac{dp_r}{dt} = 0$となる瞬間におけるrをh，m，およびωのうち必要なものを用いて表せ。

(4) この2次元調和振動子が円運動をおこなうとき，系のエネルギーEをh，m，およびωのうち必要なものを用いて表せ。

[2]

位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ での静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ に対するマクスウェル方程式は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \text{(i)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=0 \qquad \text{(ii)}$$

である。ここで ε_0 は真空の誘電率，$\rho(\vec{r})$ は電荷密度である。

(1) 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を用いて $\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ とおくと，(ii) は恒等的に満たされることを示せ。

(2) 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ が，ポアソン方程式

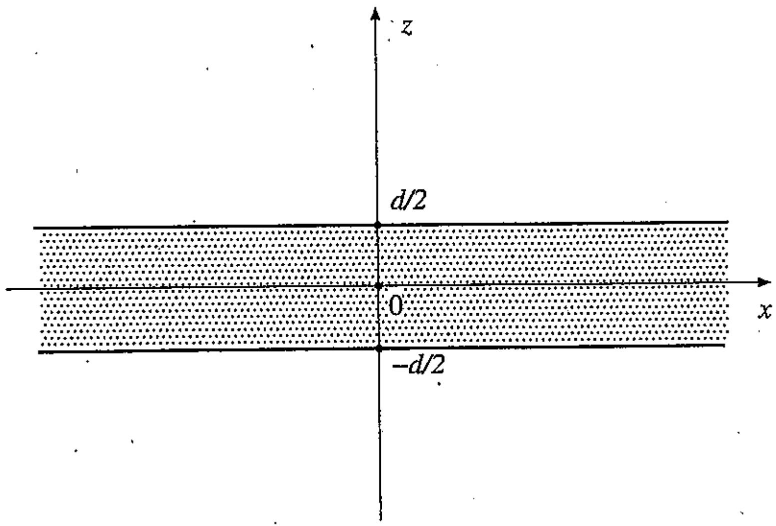
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

を満たすことを示せ。

厚さ d の無限に広がる板があり，その内部には電荷が電荷密度 $\rho(\vec{r})=\rho_0$ で一様に分布している。この板を真空中に置き，その中心面が xy 平面に一致するように座標軸をとる。図は xz 平面で切った板の断面である。

(3) ϕ は z のみの関数になることに注意して，ポアソン方程式の一般解を求めよ。ただし，板の誘電率は真空の誘電率と等しいとする。

(4) 静電ポテンシャル $\phi(z)$ と電場 $\vec{E}(z)$ のもつ対称性と接続条件に注意し，$\phi(z)$ を求めよ。ただし，静電ポテンシャルは $z=0$ で $\phi(0)=0$ とせよ。



つぎに，静磁場について考察する。マクスウェル方程式によると位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ での静磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r})=0 \qquad \text{(iii)}$$

を満たさなければならない。

(5) ベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ を用いて $\vec{B}(\vec{r})=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ とおくと，(iii) は恒等的に満たされることを示せ。

(6) ふたつの異なるベクトルポテンシャル $\vec{A}_1(\vec{r})=(0,Bx,0)$, $\vec{A}_2(\vec{r})=(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0)$ の作り出す磁場は，ともに $\vec{B}=(0,0,B)$ であることを示せ。

(7) 一般に，ベクトルポテンシャルには，$\vec{A}'(\vec{r})=\vec{A}(\vec{r})+\vec{\nabla}\chi(\vec{r})$ の不定性が存在する。問 (6) の場合に，$\vec{A}_1$ と $\vec{A}_2$ の違いを導くスカラー場 $\chi(\vec{r})$ を求めよ。

[3]

棒状の同種分子 N 個からなる古典理想気体が体積 V の容器に閉じ込められている。各分子は一定の大きさ μ の電気双極子モーメントを持ち，その方向は棒の方向と平行である。この気体を外部からの一様な電場 E の中に置くと，1分子のハミルトニアンは次のように書ける。

$$H = \frac{1}{2M}|\vec{P}_{\rm c}|^2 + \frac{1}{2I}[(p_\theta)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(p_\phi)^2] - \mu E\cos\theta$$

ここで，M は分子の質量，I は分子の慣性モーメント，$\vec{P}_{\rm c} = (P_{\rm c}^{\rm x}, P_{\rm c}^{\rm y}, P_{\rm c}^{\rm z})$ は分子の重心運動量である。また，θ，ϕ は電場の方向を軸とする極座標であり，分子の配向を記述する。p_θ，p_ϕ はそれぞれ θ，ϕ に共役な一般化運動量である。

重心運動の自由度による分配関数 $Z_{\rm m}$ と回転運動の自由度による分配関数 $Z_{\rm R}$ を用いて，1分子の分配関数は $Z_1 = Z_{\rm R}Z_{\rm m}$ とかける。ここで，$Z_{\rm m}$ と $Z_{\rm R}$ は次のように与えられる。

$$Z_{\rm m} = \frac{V}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}P_{\rm c}^{\rm x}{\rm d}P_{\rm c}^{\rm y}{\rm d}P_{\rm c}^{\rm z}\exp(-H_{\rm m}/k_{\rm B}T)$$
$$Z_{\rm R} = \frac{1}{h^2}\int_0^{\pi}{\rm d}\theta\int_0^{2\pi}{\rm d}\phi\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}p_\theta\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}p_\phi\exp(-H_{\rm R}/k_{\rm B}T)$$

ただし，$H_{\rm m} = \frac{1}{2M}|\vec{P}_{\rm c}|^2$，$H_{\rm R} = \frac{1}{2I}[(p_\theta)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(p_\phi)^2] - \mu E\cos\theta$ であり，T は温度である。h はプランク定数であり，$k_{\rm B}$ はボルツマン定数である。

(1) $Z_{\rm m}, Z_{\rm R}$ が以下のようになることを示せ。

$$Z_{\rm m} = \frac{V}{h^3}(2\pi Mk_{\rm B}T)^{\frac{3}{2}}$$
$$Z_{\rm R} = \frac{1}{h^2}8\pi^2Ik_{\rm B}T\frac{\sinh(\mu E/k_{\rm B}T)}{\mu E/k_{\rm B}T}$$

必要があれば以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-a^2x^2){\rm d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

(2) 気体の分配関数 Z は，1分子の分配関数 Z_1 を用いて $Z = Z_1^N/N!$ と書ける。その理由を述べよ。

(3) 1分子あたりの自由エネルギー $F = -k_{\mathrm{B}}T \log Z_1$ を用いて，単位体積あたりの電気分極 $P = \frac{N}{V}\langle \mu \cos\theta \rangle$ が次式で与えられることを示せ。

$$P = -\frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial E}$$

ここで，$\langle \cdots \rangle$ はカノニカル分布による統計平均を意味する。

(4) 前問の結果を用いて，単位体積あたりの電気分極 P を求めよ。

(5) 電場をゼロにする極限を取ることにより，この気体の誘電率

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \lim_{E \to 0} \frac{P}{E}$$

を求めよ。ただし，ε_0 は真空の誘電率である。

(6) 前問で求めた誘電率の温度依存性の概形を書け。

[4]

座標原点を振動の中心として調和振動する質量 m の粒子を量子力学で考える。振動の角振動数は ω_0 であるとする。以下の問いに答えよ。ただし，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で，h はプランク定数である。

まず，x 軸にそった1次元運動のみを考察する。1次元調和振動子のハミルトニアンは運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

であり，エネルギー E をもつエネルギー固有状態を定めるシュレーディンガー方程式（エネルギー固有値方程式）は，波動関数 $\phi(x)$ に対して，

$$\hat{H}\phi(x) = E\phi(x)$$

で与えられる。調和振動子を記述するうえで生成消滅演算子は有用である。ここで，消滅演算子 $\hat{a}$ および生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{b} + i\frac{b}{\hbar}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{b} - i\frac{b}{\hbar}\hat{p}\right)$$

で定義する (b は正の実定数で，$\dagger$ はエルミート共役を表す)。このとき，生成消滅演算子は交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

を満たす。また，ハミルトニアンは，生成消滅演算子の積 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ を使って

$$\hat{H} = \alpha\hat{a}^\dagger\hat{a} + \beta$$

と表される。ここで α, β は定数である。

(1) エネルギー固有値方程式を，波動関数 $\phi(x)$ に対する微分方程式として表せ。

(2) 定数 α, β および b を求めよ。

(3) 基底状態の波動関数は

$$\phi_0(x) = C\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{b^2}\right)$$

である。ここで $C = \pi^{-\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$ は規格化定数である。この波動関数が

$$\hat{a}\phi_0(x) = 0$$

を満たすこと，および，エネルギー固有値方程式を満たすことを示せ。

(4) 基底状態のエネルギーを求めよ。

(5) 次の式で与えられる波動関数

$$\phi_1(x) = \hat{a}^\dagger \phi_0(x)$$

がエネルギー固有値方程式を満たすことを示し，この状態のエネルギーを求めよ。

次に，等方的なポテンシャル

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

をもつ質量 m の 3 次元調和振動子を考える。

(6) 基底状態のエネルギーと波動関数を書け。

(7) 基底状態の角運動量量子数はいくらか。答えとその理由を述べよ。

(8) 第 1 励起状態のエネルギーと縮退度はいくらか。また，角運動量量子数がいくらか答えよ。