平成２２年度第１次募集（平成２１年１０月入学を含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　選　抜

自然構造科学専攻

A1　物理学

基礎科目（基礎物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で５ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

A. 質量 m_1, m_2 の 2 つの質点 1, 2 が平面上を運動している。それぞれの位置をデカルト座標を用いて (x_1, y_1), (x_2, y_2) と表す。2 つの質点は互いに力を及ぼしあっていて，それ以外の力は働いていないものとする。力のポテンシャル $U(r)$ が相対距離 $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ だけに依存するとき，以下の問いに答えよ。

(1) この系のラグランジアン L を，m_1, m_2, $U(r)$, および，x_1, y_1, x_2, y_2 とそれらの時間微分のうち必要なものを用いて表せ。

(2) 重心の座標 (X, Y) を m_1, m_2, x_1, y_1, x_2, y_2 のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 2 つの質点の相対座標を $(x, y) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ とするとき，ラグランジアン L は次のように表されることを示せ。

$$L = \frac{1}{2}M\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(r)$$

ここで，$M = m_1 + m_2$ は全質量，$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ は換算質量で，時間微分を $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ のように表す。

(4) 重心座標 (X, Y) と相対座標 (x, y) の運動方程式をそれぞれ書け。

B. 中心力場中で平面上を運動する質量 m の質点を考える。平面極座標 (r, φ) を用いて，中心力場のポテンシャルが，正の定数 K と自然数 n を用いて，次の式で与えられるものとする。

$$U(r) = -\frac{K}{r^n}$$

(1) 質点の運動エネルギー T と原点のまわりの角運動量の大きさ ℓ をそれぞれ，m および，r, φ とそれらの時間微分のうち必要なものを用いて表せ。

(2) エネルギー E と角運動量 ℓ の保存則から

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\Big[E - U_{\mathrm{eff}}(r)\Big], \qquad U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

となることを示せ。ここで，導入した $U_{\mathrm{eff}}(r)$ は有効ポテンシャルと呼ばれる。

(3) $n = 1$ のとき，有効ポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}(r)$ の概略を横軸 r，縦軸 U_{eff} としてグラフに示せ。ただし，$\ell \neq 0$ とする。

(4) いま，$n = 1$ で，質点は原点を中心とする半径 R の円軌道を描いている。この円軌道の軌道半径 R とエネルギー E をそれぞれ，m, ℓ, K を用いて表せ。

(5) $n \geq 2$ のとき，安定な円軌道が存在しないことを示せ。

[2]

導線を流れる電流に関する以下の問いに答えよ。ただし，導線の抵抗は無視できるものとし，問(1)と(2)では導線の太さは無視せよ。真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0 とする。

図１のように，z 軸上に無限に長い導線を置き，z 軸の正の向きに電流 I を流した場合に周囲に発生する磁束密度について考える。このとき，導線上の点 P(0,0,z)にある導線の微小長さ部分 $\Delta\vec{z}=(0,0,\Delta z)$ を流れる電流によって x 軸上の点 Q(x,0,0)につくられる磁束密度 $\Delta\vec{B}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{r}$ として以下のように表される。

$$\Delta\vec{B} \fallingdotseq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\vec{z}\times\vec{r}}{r^3}$$

(1) $\Delta\vec{B}$ を z について積分することにより，直線電流 I によって点 Q につくられる磁束密度の大きさと向きを求めよ。

(2) 問(1)で得られた結果が，アンペールの法則から得られる結果と一致することを示せ。

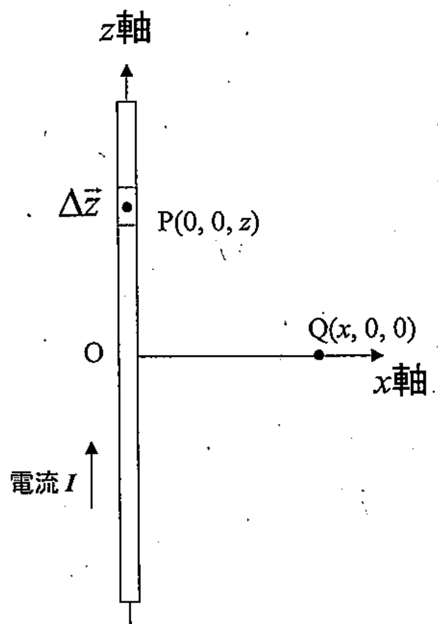

図１

次に，図 1 の導線を有限の太さを持つ導体 A で置き換え，その外側を有限の厚みを持った円筒状の導体 B で同心円状に覆う。導体 A の中心軸を z 軸として，図 2 に z 軸に垂直な断面図を示す。内側の導体 A と外側の導体 B の間は真空であるとする。このような構造のケーブルを同軸ケーブルという。導体 A の半径を a，導体 B の内径と外径をそれぞれ b と c として，以下の問いに答えよ。

(3) 大きさ I の電流が，A では z 軸の正の向き，B では z 軸の負の向きに流れているとする。点 Q(x,0,0)における磁束密度の大きさを，(i) $0<x<a$, (ii) $a<x<b$, (iii) $b<x<c$, (iv) $c<x$ のそれぞれの場合について求めよ。ただし，電流はそれぞれの導体内を一様に流れているとする。

(4) この同軸ケーブルの z 軸方向の単位長さあたりについて，AB 間の電気容量 C を求めよ。

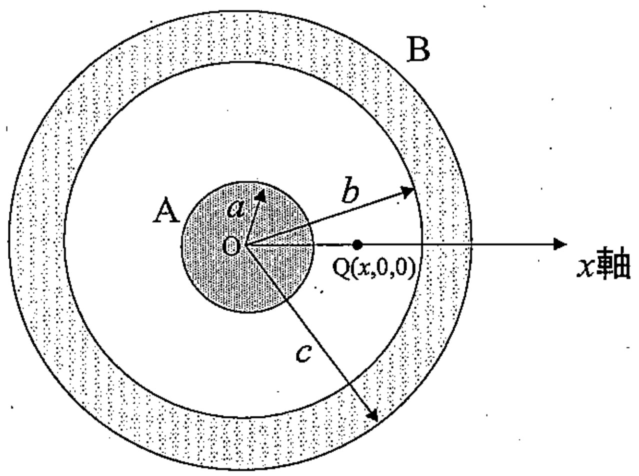

図 2