平成２１年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

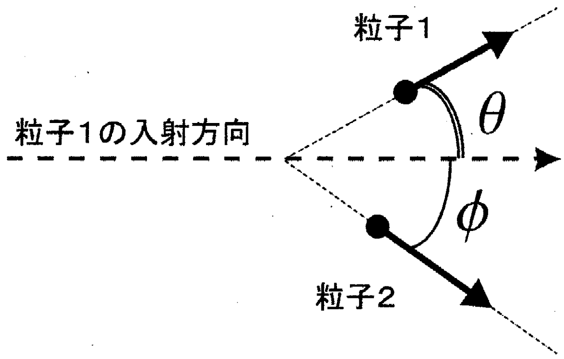
３．問題は全部で３題あります。各解答用紙に受験番号を記入してください。

４．解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

1. 摩擦のないテーブル上での粒子の衝突を考える。質量 m_1 の粒子１が速さ v_1 で，質量 m_2 の静止している粒子２に衝突し，衝突後は下図のように入射方向に対してそれぞれ角度 θ と ϕ の方向に散乱された。ただし，$\theta \neq 0$ および $\phi \neq 0$ とする。以下の問いに答えよ。



   a. 衝突後の粒子１および粒子２の速さを求めよ。

   b. 完全弾性衝突のとき，角度 θ と ϕ の間に

$$\tan\theta = \frac{m_2 \sin 2\phi}{m_1 - m_2 \cos 2\phi}$$

   が成り立つことを示せ。

2. 質量 m の粒子の x 軸上での運動を考える。粒子には，弾性力 $F_1 = -m\omega^2 x(t)$ と摩擦力 $F_2 = -2m\gamma\dot{x}(t)$ が作用している。ここで，$x(t)$ は時刻 t での粒子の位置であり，$\dot{x}(t)$ は $x(t)$ の時間微分 $\left[\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}\right]$ である。また，ω と γ は正の定数であり，条件 $\omega < \gamma$ を満たす。以下の問いに答えよ。

   a. 粒子の運動を記述する $x(t)$ に対する微分方程式を書け。

   b. a. で得られた微分方程式の一般解を求めよ。

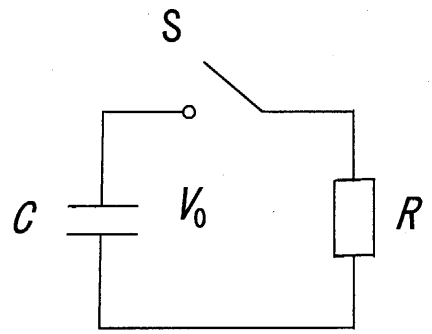
   c. 初期時刻 $t = 0$ における粒子の位置を $x(0) = 0$ とし，その速度を $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ として，任意の時刻での粒子の位置 $x(t)$ を求めよ。

   d. c. の結果を用い，粒子の位置 $x(t)$ が最大の値をとる時刻 t_1 を求めよ。

II.

1. 図１のような，電圧 V_0 に充電された電気容量 C のコンデンサーと抵抗 R からなる回路において，時刻 $t=0$ でスイッチ S を閉じた。導線の抵抗は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

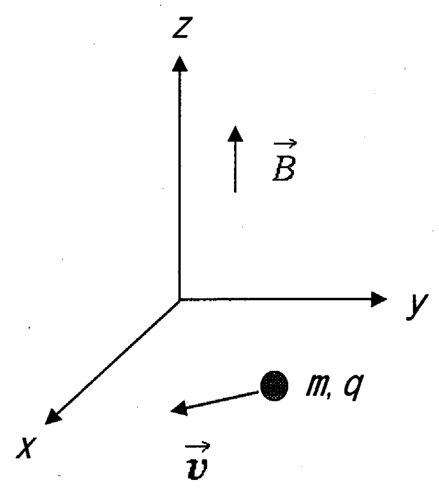
図１



a. R を流れる電流 $I(t)$ を時間 t の関数として求めよ。
b. $t=0$ から電流が 0 となるまでの間に抵抗内で発生する全熱エネルギーを求めよ。

2. 図２のように，真空中で z 軸の正の方向に一様な磁束密度 $\vec{B}=(0,0,B)$ の磁界があり，質量 m, 電荷 $q>0$ の粒子が xy 面内で運動している。粒子の速度を $\vec{v}$ として，以下の問いに答えよ。

図２



a. 粒子に働く力 $\vec{F}$ を表す式を書け。
b. 粒子の運動は等速円運動になることを簡潔に説明せよ。
c. この円運動の半径 r を q, B, m および $v=|\vec{v}|$ を用いて表せ。

3. 真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問いに答えよ。

a. 座標原点に置いた電荷 q の点電荷が作る静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ として正しいものを以下の (1)~(6) から選べ。 ここで $\vec{r}=(x,y,z)$ は位置ベクトルであり, ポテンシャルの値は無限遠で 0 とする。

(1) $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}|^3}$ (2) $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}|^2}$ (3) $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}|}$

(4) $-\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}|^3}$ (5) $-\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}|^2}$ (6) $-\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{r}|}$

b. 座標原点に電荷 q の点電荷が置かれているとき, 位置 $\vec{r}$ における電場 $\vec{E}(\vec{r})=(E_x(\vec{r}),E_y(\vec{r}),E_z(\vec{r}))$ を書け。

c. 位置 $(0,0,a)$ に電荷 q の点電荷, 位置 $(0,0,-a)$ に電荷 $-q$ の点電荷が置かれているとき, 両電荷から十分離れた位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ において, 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ が近似的に

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{aqz}{|\vec{r}|^3}$$

となることを示せ。

d. 水素原子中の電子に対するポテンシャルエネルギーを書け。簡単のため, 水素の原子核は静止しているとする。また, 用いる記号の定義を明示すること。

III.

1. 質量 m の質点の位置ベクトルを $\vec{r}=(x,y,z)$ とし，この質点の運動量ベクトルを $\vec{p}=m\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(p_x,p_y,p_z)$ とする。ここで，t は時間である。以下の問いに答えよ。

   a. 角運動量ベクトル $\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}$ を $\vec{r}$ と $\vec{p}$ の成分を用いて表せ。

   b. $\vec{r}$ と $\vec{p}$ の間の角度を θ としたとき，$\vec{\ell}$ の大きさ $|\vec{\ell}|$ を，$|\vec{r}|$，$|\vec{p}|$ および θ を用いて表せ。

   c. この質点に，$\vec{r}$ 方向の力 $\vec{F}=k\vec{r}$（k は定数）が働いているとき，$\vec{\ell}$ が保存することを示せ。

2. 物理学においては，行列の対角化の問題がよく現れる。ω を実数，i を虚数単位，行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 0 & i\omega \\ -i\omega & 0 \end{pmatrix}$$

   として以下の問いに答えよ。

   a. 行列 A の固有値，および各固有値に対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。

   b. 適当なユニタリー行列 U を用いて

$$A=U\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}U^{\dagger}$$

   の形に表せ。ここで，λ_1, λ_2 は a. で求めた A の固有値，$U^{\dagger}$ は行列 U の随伴行列を表し，行列 U がユニタリーであるとは，$U^{-1}=U^{\dagger}$ であることをいう。

   c. 一般に，正方行列 X の指数関数 e^X は，無限級数

$$e^X=E+X+\frac{1}{2!}X^2+\cdots+\frac{1}{n!}X^n+\cdots$$

   で定義される。ここで E は単位行列を表す。b. の結果を利用して，行列 e^{iAs}（s は任意の実数）を求めよ。