平成２１年度第１次募集（平成２０年１０月入学含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　選　抜

自然構造科学専攻

A1　物理学

基礎科目（基礎物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で４ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

質量 m の質点が，中心力場ポテンシャル $V(r) = -\dfrac{Km}{r}$ のなかで運動する。ここで r は，座標原点からの距離，K は，正の定数である。

(1) 時刻 t における質点の位置ベクトルを $\vec{r}$，運動量ベクトルを $\vec{p}$ とすると質点の運動方程式は，次のようになる。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{Km}{r^3}\vec{r}, \quad r = |\vec{r}\,|$$

このとき，質点の角運動量ベクトル $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ が保存すること，すなわち $\dfrac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{0}$ であることを示せ。

２つのベクトル $\vec{r}$ と $\vec{r} \times \vec{p}$ は互いに垂直なので問 (1) の結果より，定ベクトル $\vec{\ell}$ の向きに z 軸を選ぶと質点は常に，$x-y$ 平面上で運動する。このとき，平面極座標 (r, φ) を用いると質点のラグランジュ関数 (ラグランジアン) L は，次のようになる。

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{Km}{r}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

(2) 変数 r と φ に対する一般化運動量（共役運動量）である P_r，および P_φ をそれぞれ求めよ。

(3) 変数 r と φ に対するラグランジュの運動方程式 (オイラー＝ラグランジュ方程式) をそれぞれ書け。

(4) 問 (3) の結果を用いて，次のように与えられる質点のエネルギー E が保存することを示せ。

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Km}{r}$$

(5) 質点が次のような運動をしているとき，質点のエネルギー E，および角運動量の大きさ $\left|\vec{\ell}\right|$ はそれぞれいくらか。

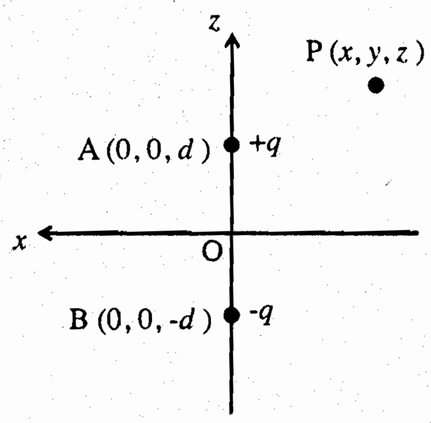
$$\text{時刻} \quad t = 0 \quad \text{で} \quad r = R > 0, \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2K}{R}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi} = 0$$

(6) 問 (5) の場合について，r と φ を t の関数としてそれぞれ求めよ。

[2]

正負の点電荷の対$+q$，$-q$が小さな距離aだけ離れて存在するとき，これを電気双極子という。また，負の電荷$-q$から正の電荷$+q$へ向う，大きさqaのベクトル$\vec{p}$を電気双極子モーメントという。

いま，図のように正の電荷$+q$が点$\mathrm{A}(0,0,d)$に，負の電荷$-q$が点 $\mathrm{B}(0,0,-d)$におかれている状態を考える。ε_0を真空の誘電率とする。



(1) 電気双極子モーメントの大きさpを求めよ。

(2) $+q$，$-q$の点電荷の対がつくる点$\mathrm{P}(x,y,z)$での電位$\phi(x,y,z)$を書け。

(3) 原点Oから点Pまでの距離$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$に対して，dが十分小さい場合には，(2)の結果を近似したものが電気双極子$\vec{p}$のつくる電位になる。$|t|<<1$のときの近似式$(1+t)^{-1/2}\cong 1-t/2$を用いて，dの1次までの正しさで計算し，電位ϕが

$$\phi(x,y,z)=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3} \qquad \text{(a)}$$

となることを示せ。

(4) (a)式で表される電位$\phi(x,y,z)$から電気双極子による電場$\vec{E}(x,y,z)$の各成分E_x, E_y, E_zをそれぞれ求めよ。

(5) 位置ベクトル$\vec{r}=(x,y,z)$を用いると，電気双極子による電場$\vec{E}(x,y,z)$は

$$\vec{E}(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{\vec{p}-\frac{3(\vec{p}\bullet\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right\} \tag{b}$$

となることを示せ。

(6) この電気双極子がつくる x-z 平面での等電位線と電気力線の概略図をそれぞれ書け。電気力線は矢印で向きも表すこと。