平成２０年度第１次募集新潟大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験問題

（専攻名）自然構造科学専攻

（試験実施単位名）　Ａ１

基礎科目

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で４ページある。（表紙は含まない。）

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，120 分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

なめらかで水平な床の上に，4本の質量を無視できる等しいバネ（自然長 l，バネ定数 k）で，3個の等しい質点（質量 m）をつないで置き，全長が $4l$ になるようにして両端を壁に固定した（図1）。全系は一直線をなしている。バネの方向に x 軸をとり，左側の壁を $x=0$ とした。質点の座標をそれぞれ x_1，x_2，x_3 とする ($x_1 < x_2 < x_3$)。この系のつりあい近傍の微小な縦振動（x 軸方向の振動）について調べる。

(1) 質点がつりあいの位置から少しずれているときに，バネの弾性エネルギー U を x_1，x_2，x_3 を用いて書け。
(2) $X_1 = x_1 - l$，$X_2 = x_2 - 2l$，$X_3 = x_3 - 3l$ として，U を X_n $(n = 1, 2, 3)$ を用いてあらわせ。なお，これ以後は X_n を座標として用いる。
(3) この系の運動エネルギー T を求めよ。
(4) この系のラグランジアンを求めよ。
(5) この系のラグランジュの運動方程式を書け。

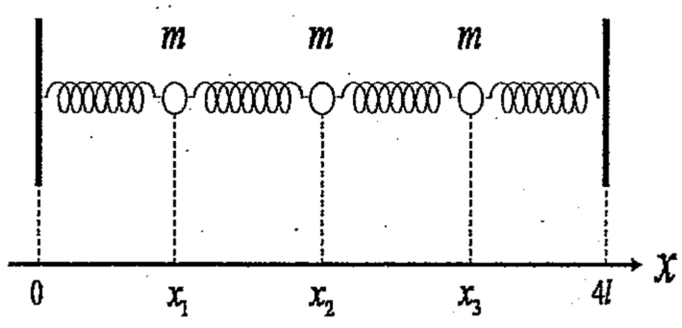

図1

次に，図2のように，壁とつなぐバネを取り外し，中央の質点を質量 M の質点と取り替えた。この系での微小な縦振動（x 軸方向の振動）を考える。

(6) 質点の座標がつりあいの位置から少しずれているときに，バネの弾性エネルギー U を求めよ。

(7) この系のラグランジアンを求めて，ラグランジュの運動方程式を書け。

(8) 時間 t に対する依存性を $X_n = a_n \exp[i\omega t]$ とおいて，基準振動数を求めよ。

(9) この系では，$\omega = 0$ の解が存在する。$\omega = 0$ の解がどういう運動に対応するか，説明せよ。

(10) また，$\omega \neq 0$ の各基準振動数に対して，振幅の比を求め，振動の様子を説明せよ。

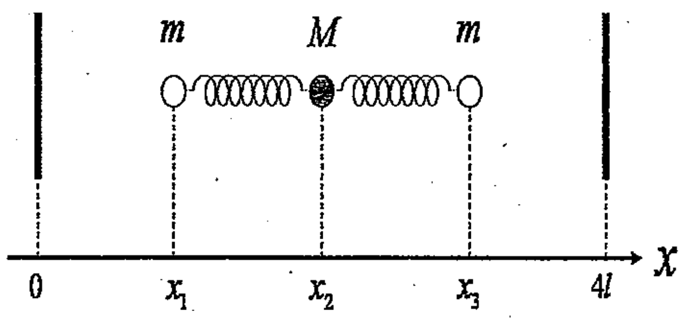

図2

[2]

電磁気学の基本法則は次のマックスウェル方程式で記述される。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t), \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t), \tag{2.3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = 0. \tag{2.4}$$

ここに，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$, $\rho(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)$ は，それぞれ，時刻 t，位置 $\boldsymbol{r}$ における，電場，電束密度，磁場，磁束密度，電荷密度，電流密度を表す。$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ 及び $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ は，誘電率 ε および透磁率 μ を用いて，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ の関係がある。真空中では，$\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ である。マックスウェル方程式を用いて以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば，次のベクトル解析の公式を用いよ。

(公式)

(i) $\boldsymbol{r}$ の関数である任意のベクトル $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r})$ について，

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}) - \Delta \boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}), \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

(ii) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対し，$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$.

(1) 真空中に置かれた，半径 a の球形の誘電体（誘電率 ε）に，正電荷 Q が一様に分布している。この電荷によって作られる電場は，球の中心から放射状に広がる。中心から距離 r $(0 < r < \infty)$ の点における電場の大きさ $E(r)$ を (2.1) より求めよ。

(2) 真空中に，無限に長く，大きさが I の直線定常電流が流れている。この電流によって作られる磁場は，電流を中心軸とした同心円の接線方向の成分のみをもつ。この電流から距離 r の点での磁場の大きさ $H(r)$ を (2.3) より求めよ。

(3) 細い導体でできた閉回路 C を，時間的に変化する磁束 $\Phi(t)$ が貫いている。このときに C に発生する誘導起電力 $V(t)$ を求めよ。

(4) 電荷の保存則を表す式 $\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = 0$ を導け。

(5) 電荷と電流が存在しない（$\rho(\boldsymbol{r},t) = 0$, $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = 0$）真空中における電磁場を考える。以下の問 (a)~(d) に答えよ。

(a) $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ とおくと，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は，ともに以下の波動方程式を満たすことを示せ。

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0, \qquad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0. \tag{2.5}$$

(b) 波動方程式 (2.5) の解の１つとして，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向に伝搬する波，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \alpha), \tag{2.6}$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ は実定数ベクトルで，α は適当な位相である。ω と $\boldsymbol{k}$ の関係を求めよ。

(c) (2.6) において，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ がともに $\boldsymbol{k}$ と直交していることを示せ。また，α を決めるとともに，$\boldsymbol{E}_0$ と $\boldsymbol{B}_0$ の関係を求め，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が直交していることを示せ。

(d) (2.6) のような解は何偏光の電磁波と呼ばれるか答えよ。