平成２９年度第２次募集

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

中心力場の中で平面運動する質点のラグランジアン L が，次のように与えられている。

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{a}{r}, \qquad (0 \le r < \infty,\ 0 \le \phi < 2\pi)$$

ここで，m は質点の質量，a は負の定数である。また，一般化座標の組 (r, ϕ) は，平面極座標における質点の位置を表し，$\dot{r}$ と $\dot{\phi}$ はそれぞれ，r と ϕ の時間 t に関する微分である。

(1) r と ϕ に共役な一般化運動量 p_r と p_ϕ をそれぞれ求めよ。

(2) 質点のハミルトニアン H を求めよ。

(3) r と ϕ に対するラグランジュの運動方程式をそれぞれ求めよ。

次に $t > 0$ において，$r(t) = A\,t^\lambda$ と $\phi(t) = 0$ が問 (3) で求めたラグランジュの運動方程式の解になる場合を考える。ここで，A と λ は適当な実定数である。

(4) A と λ をそれぞれ求めよ。

(5) 質点のエネルギー E を求め，E が一定となることを確かめよ。

[2]

I. 図1のように, 円形回路の中心を点Oとし, その点を通り回路に垂直な直線L上の点Pに生じる磁場を考える。OP間の距離はx, 円形回路の半径はaであり, 回路に流れる電流の大きさはIである。円形回路の微小部分Δsを流れる電流によって距離R離れた直線L上の点に生じる磁場の大きさが$\Delta H = \dfrac{I\Delta s}{4\pi R^2}$で与えられることを用いて, 以下の問いに答えよ。

(1) 円形回路の微小部分Δsに流れる電流によって点Pに生じる磁場について, 直線Lに垂直な成分$\Delta H_{\perp}$と平行な成分$\Delta H_{\parallel}$の大きさをそれぞれ求めよ。

(2) 円形回路に流れる電流によって点Pに生じる磁場の大きさが以下のように表されることを示せ。

$$H = \frac{Ia^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$

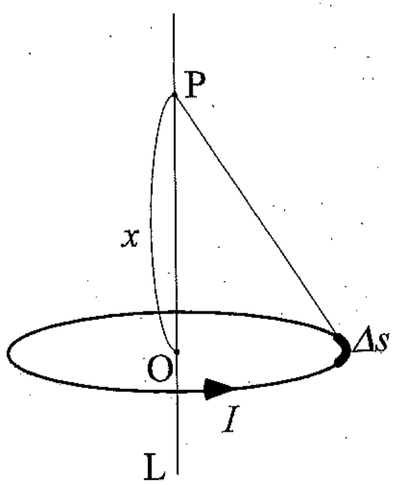

図1

II. 長さ ℓ のソレノイドコイルに大きさ I の電流を流したときの中心軸上に生じる磁場について考える。コイルの中心軸に垂直な断面は半径 a の円形であり，単位長あたりの巻き数を n とする。図 2 のように，コイルの中心軸上に原点を O とする座標軸をとり，コイルの端点の座標を $-\ell/2$ および $\ell/2$ とする。また，コイルの導線上に点 Q，中心軸上に点 P をとり，それらの座標をそれぞれ x, X とする。コイルに流れる電流の向きが図 2 に示される通りとして，以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q を含む微小幅 Δx をもつコイルの環状部分に流れる電流によって点 P に生じる磁場の大きさ ΔH を求めよ。

(2) 図 2 のように座標軸と直線 PQ のなす角を θ とするとき，$\cot\theta$ を a, x, X を用いて表せ。

(3) ΔH をコイル全長にわたって積分することで，中心軸上の磁場を求めることができる。図 2 のようにコイルのそれぞれの端点と点 P を結んだ直線と座標軸がなす角を θ_1, θ_2 とするとき，コイルによって点 P に生じる磁場の大きさ H が以下のように表されることを示せ。

$$H = \frac{nI}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

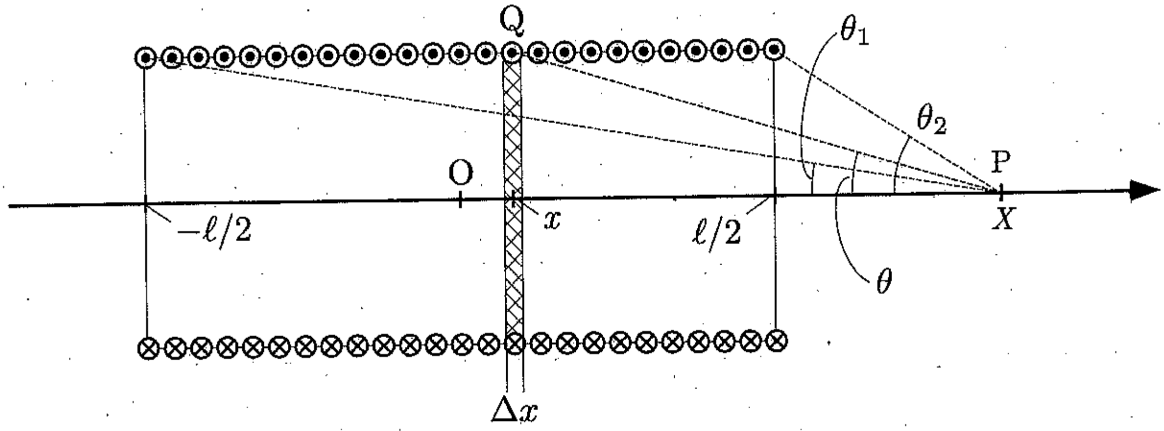

図 2

[3]

結晶の表面上に N 個の格子点があり，そこに結晶と同種の粒子が自由に吸着したり離れたりしている。各格子点に吸着している粒子数を m，そのときの格子点のエネルギーを $E(m)$ とする。ここでは，粒子数は $m=0$，1 のみをとることができ，エネルギーは周りの格子点とは独立に $E(0)=0$ および $E(1)=\epsilon$ であるとする。いま，この結晶表面の粒子系が温度 T の熱平衡状態となっている場合を考える。ただし，粒子に対する化学ポテンシャルはゼロであると仮定する。ボルツマン定数を k_{B} として，以下の問いに答えよ。

(1) 結晶表面の粒子系に対する分配関数と自由エネルギーを求めよ。

(2) 全エネルギーおよび吸着している全粒子数の期待値を求めよ。

(3) 比熱を求め，その温度変化の概形を図示せよ。

次に，格子点上に粒子が1個まで吸着できるだけでなく，その格子点上の結晶の粒子が1個まで抜けられる場合を考える。すなわち，各格子点の粒子数が $m=-1$，0，1 をとりうるとする。また，各格子点のエネルギーは，$m=0$ のとき $E(0)=0$ であり，$m=\pm1$ のとき $E(\pm1)=\epsilon$ であるとする。

(4) 結晶表面の粒子系に対する分配関数を求めよ。

(5) 1格子点あたりのエネルギーの期待値を求めよ。

(6) 1格子点あたりの粒子数の期待値 $\langle m\rangle$ とそのゆらぎ $\langle(m-\langle m\rangle)^2\rangle$ を求めよ。

[4]

質量 m の一次元調和振動子を考える。振動子の変位を x，振動の角振動数を ω とすると，力のポテンシャルは次式で与えられる。

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

プランク定数 h に対して $\hbar = h/2\pi$ として，以下の問いに答えよ。

(1) この振動子の定常状態を表す x 表示の波動関数を $\psi(x)$，定常状態のエネルギーを E とする。運動量演算子 $\hat{p}$ に対して，$\hat{p}\,\psi(x)$ を x に関する微分を用いて書け。また，$\psi(x)$ が満たすシュレーディンガー方程式を書け。

以下では，振動子が基底状態にある場合を考える。その波動関数を $\phi_0(x)$，エネルギー固有値を E_0 とする。問 (1) のシュレーディンガー方程式を書き換えると，波動関数 $\phi_0(x)$ は次の微分方程式を満たすことがわかる。

$$\left[-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda^2}\right]\phi_0(x) = \left(\frac{E_0}{\hbar\omega}\right)\phi_0(x)$$

ここで，λ は長さの次元をもつ正の定数である。

(2) 質量，長さ，時間の次元をそれぞれ M，L，T で表すとき，運動量 p およびエネルギー E の次元は，それぞれ $[p] = \mathrm{MLT^{-1}}$ および $[E] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$ と表される。

(a) これに習って，$\hbar$ の次元を答えよ。

(b) 定数 $\hbar\omega$ がエネルギーの次元を持つことを示せ。

(c) 長さの次元をもつ定数 λ を $\hbar$，m，ω を用いて表せ。

基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ を，正の定数 N および a を用いて，次の形に仮定する。

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{a}{2}x^2}$$

(3) この形の $\phi_0(x)$ が解であるためには，$\phi_0(x)$ を上記の微分方程式に代入したとき，x のベキごとに方程式が成り立つ必要がある。

(a) このことから，定数 a が $1/\lambda^2$ に等しいことを示せ。

(b) エネルギー固有値 E_0 を求めよ。

(4) 規格化条件から，定数 N を決定せよ。必要ならば，下に示された積分公式を用いてよい。

(5) 基底状態 ϕ_0 において，運動エネルギーの期待値 $\langle \hat{p}^2/2m \rangle$ とポテンシャルエネルギーの期待値 $\langle V \rangle$ の和は E_0 に等しい。両者のいずれか一方を計算し，関係式

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle = \langle V \rangle = \frac{1}{2} E_0$$

を示せ。必要ならば，下に示された積分公式を用いてよい。

積分公式

$$I(a) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2} = -\frac{d}{da} I(a)$$