平成２７年度第１次募集（平成２６年１０月入学含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページある。

3　解答用紙は，全部で４枚ある。

4　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

5　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

6　解答時間は，１８０分である。

7　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

図1のように天井の点Oから自然長lでばね定数k_1のばね1に質量mのおもり1がつながっている。点Oを原点として鉛直下向きに軸をとったとき，おもり1の位置をXとする。おもりは鉛直方向でのみ運動し，天井に当たることは無いとする。また，ばねの質量は無視できる。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。

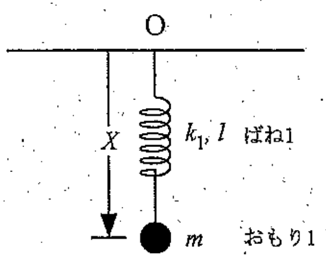


図1

(1) おもり1が静止しているつりあいの状態でのおもり1の位置X_0を求めよ。

(2) おもり1をつりあいの位置から鉛直方向に振動させた。この振動の運動方程式を解き，周期を求めよ。

次に，図2のように自然長がLでばね定数k_2のばね2と質量Mのおもり2をおもり1につなげた。点Oを原点として鉛直下向きに軸をとったときのおもり1の位置をx，おもり2の位置をyとする。いずれのおもりも鉛直方向でのみ運動し，またおもり同士が衝突することはなく，天井に当たることも無いとする。以下の問いに答えよ。

(3) おもりが静止しているつりあいの状態でのおもり1と2の位置をそれぞれx_0, y_0とする。これらを求めよ。

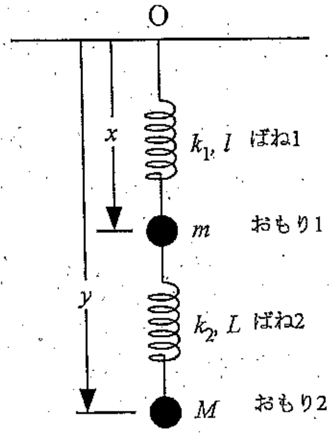


図2

次に，おもり2に鉛直方向下向きに力 F を加えて静止させた。おもり2の位置は $y_0 + d$ となった。

(4) このときのおもり1の位置を求めよ。

(5) このときおもり2に加えている力 F を k_1，k_2，d を用いて書け。

次に，おもり2を静かに離したところ，おもり1と2は振動をした。このときのおもり1とおもり2の力を加える前のつりあいの位置からのずれをそれぞれ x_1，y_1 とする。

(6) 変数 x_1，y_1 を用いておもり1及び2についての運動方程式をそれぞれ書け。
(7) 実数 A, B を用いて，$x_1 = Ae^{i\omega t}$，$y_1 = Be^{i\omega t}$ とおいたとき，A，B についての連立方程式を書け。なお，これらの実部が実際の解となる。
(8) A，B が0でないとき，ω が満たすべき方程式を書け。

[2]

真空の誘電率をε_0として以下の問いに答えよ。

(I) 真空中で電位ϕが $\phi(x,y,z)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}}$ で与えられるとする。ここで A は正の定数である。

(1) 電場 $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi$ の成分 E_x, E_y, E_z をそれぞれ求めよ。

(2) $\phi(x,y,z)=k$（k は正の定数）を満たす等電位面は，どのような形状となるか説明せよ。

(3) xy 平面上で $\phi(x,y,0)=k$ を満たす等電位線の接線は，接点における電場と直交することを示せ。

(4) 電荷密度 $\rho(x,y,z)$ を，ポアソンの方程式 $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ を用いて求めよ。

(II) 厚さの薄い一様な導体でできた半径aの球殻がある。球殻の内外は真空であるとする。この球殻に電荷 $Q(>0)$を与えた。

(1) このとき，球殻の中心から距離 r の点における電場 $\vec{E}(\vec{r})$の大きさを，

(i) $0<|\vec{r}|\leq a$ と (ii) $a<|\vec{r}|$ の場合についてそれぞれ求めよ。

(2) 同様に，球殻の内外における電位 $\phi(\vec{r})$ を，無限遠の電位を 0 として

(i) $0<|\vec{r}|\leq a$ と (ii) $a<|\vec{r}|$ の場合についてそれぞれ求めよ。

(3) この球殻の静電容量 C を求めよ。

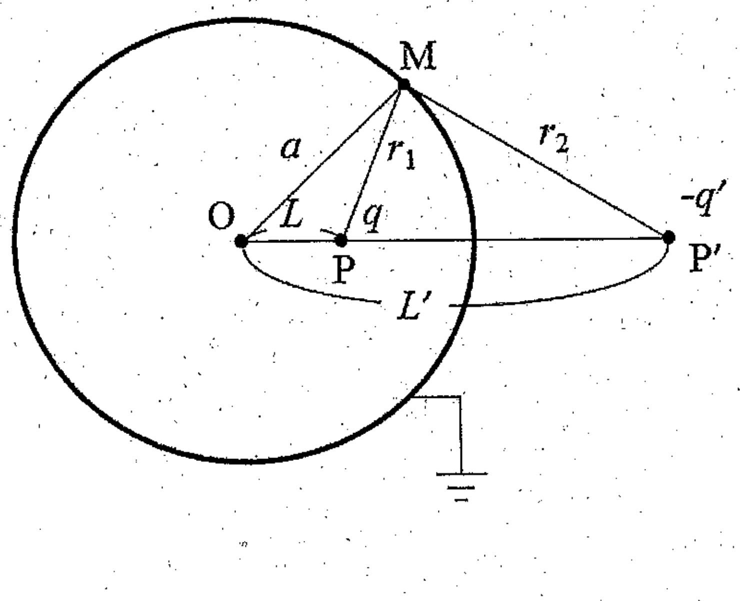
次に，この球殻を接地して，中心 O から距離 $L(<a)$ だけ離れた点 P に電荷 $q\,(>0)$を置いた。この電荷が球殻から受ける力の大きさを，鏡像法を用いて求める。

(4) 図のようにOPの延長上の O から距離 $L'(>a)$だけ離れた点P′に，仮想的な電荷$-q'$を置いたと考える。このとき，2つの電荷からの距離がそれぞれ r_1, r_2 である点Mにおける電位を r_1, r_2, q, q' を用いて表せ。

(5) L' が適当な値のとき，球殻上にある点Mに対して r_1, r_2 の比が一定となる。このときの L' を求めよ。ここで，三角形 OP′M とOMP が相似となることを用いてよい。

(6) L' が(5)で求めた値をとるとき，球殻上のすべての点で電位が0となるように q'を決めることができる。このときの q' を求めよ。

(7) 電荷が球殻から受ける力の大きさを求めよ。



[3]

スピン 1/2 をもち，質量 m の N 個の独立な中性原子からなる一次元系がある。粒子数 N は十分大きく，統計力学的に考えることができる。系の長さは L，温度は T である。各原子は大きさ μ の磁気モーメントをもち，大きさ H の一様な静磁場中での系の古典ハミルトニアンは次のように書ける。

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m} - \mu_i H \right]$$

ここで，粒子のスピンが磁場と平行，反平行の場合にそれぞれ $\mu_i = \pm\mu$ の値をとる。なお L は十分大きいものとし，系の境界の影響は無視できるものとする。必要があれば次の関係式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a} dx = \sqrt{2\pi a} \qquad (a \text{ は正の定数})$$

$$\log N! \simeq N \log N - N$$

まず温度が高く，粒子はボルツマン統計にしたがうものとして，次の問いに答えよ。

(1) $H = 0$ のとき一粒子の分配関数 Z_1 が次のように書けることを示せ。

$$Z_1 = \frac{2L}{h}\sqrt{2\pi mkT}$$

ただし，h はプランク定数，k はボルツマン定数である。

(2) このとき系の分配関数を求めよ。更に，内部エネルギー E_0 とヘルムホルツの自由エネルギー F_0 を求めよ。

(3) $H \neq 0$ のときの分配関数と内部エネルギー E，ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。なお，E_0，F_0 を用いてよい。

次に，$T = 0$ の場合を考える。粒子はフェルミ統計にしたがうものとして，次の問いに答えよ。

(4) $H = 0$ のときの系の内部エネルギーを粒子数 N，フェルミエネルギー ε_{F} を用いて表せ。

(5) $\mu H \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}$ のとき，単位長さあたりの磁化 $M = \mu(N_+ - N_-)/L$ を求め，これが磁場の強さ H に比例することを示せ。ここで，N_+, N_- はスピンの向きが磁場に平行，反平行である粒子数を表す。

(6) 次式のように定義される磁化率 χ を求めよ。

$$\chi = \lim_{H \to 0} \frac{M}{H}$$

[4]

(Ⅰ)　A, B, C の 3 つの演算子について，交換子$[X, Y] = XY - YX$ (X, Y は演算子) を用いて，以下の式が成り立つことを示せ。また，一度示した式は使用して良い。

(1) $[A, B] = -[B, A]$
(2) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$
(3) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

(Ⅱ)　A, B がエルミート演算子で，$[A, B] = \mathrm{i}C$が成り立つとする。また，ある量子状態ϕにおける演算子 X の期待値を$\langle X\rangle = \langle\phi|X|\phi\rangle$とする。

(1) C もエルミート演算子であることを示せ。

(2) A，B の期待値からのずれを表す演算子をそれぞれ$\Delta A = A - \langle A\rangle$，$\Delta B = B - \langle B\rangle$とする。$[\Delta A, \Delta B] = \mathrm{i}C$であることを示せ。

(3) $\int|(a\Delta A - \mathrm{i}\Delta B)\phi|^2 dV \geq 0$ (a は実数) を用いて，$\langle\Delta A^2\rangle\langle\Delta B^2\rangle \geq \langle C\rangle^2/4$となることを示せ。

(Ⅲ)　3 次元空間における質量 m の自由粒子の運動を量子力学的に考える。

(1) ポテンシャルを $V(x,y,z)$として，時間に依存しないシュレディンガー方程式を微分方程式で示せ。

以下のようなポテンシャルによって立方体中に閉じ込められた場合を考える。

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0\ (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l, 0 \leq z \leq l) \\ \infty\ (\text{上記以外}) \end{cases}$$

(2) 基底状態のエネルギーを求めよ。

(3) 第三励起状態の縮退度を求めよ。