平成２５年度第２次募集

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

（専攻名）数理物質科学専攻

（試験実施単位名）物理学コース

（記号）A1

# 専門科目（物理学）

**注意事項**

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で６ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

# [1]

関数$y=f(x)$があるとき，$x$，$y$および，$y'=\dfrac{dy}{dx}$の関数$F(x,y,y')$を$x$のある区間$(a,b)$で積分した$I=\int_a^b F(x,y,y')dx$は$f(x)$の汎関数である。この$I$が極大または極小値をとるとき，すなわち$I$の変分$\delta I$が0になるとき，$F(x,y,y')$は以下のオイラーの方程式を満たす。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

(1) $F(x,y,y')$が$y$を含まないとき，$I$が極値をとる$F$に対して$\dfrac{\partial F}{\partial y'}$が$x$によらない定数であることを示せ。

(2) $F(x,y,y')$が$x$を含まないとき，$I$が極値をとる$F$に対して$E=y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F$が$x$によらない定数であることを示せ。

フェルマーの原理によれば，光は通過する時間が最小になる経路を通る。2次元$(x,y)$平面上の 2 点O(0,0)とA$(a,0)$間を通過する光の経路を表す関数$y=f(x)$に関して，オイラーの方程式を用いて考える。ここで，$a$は正の定数とする。媒質の屈折率を$n$とし，真空中の光速を$c$とすると，光の速さは$\dfrac{c}{n}$であるので，光がOA間を通過するのに要する時間$T$は，微小区間の距離$\sqrt{dx^2+dy^2}$を通過するのに要する時間を区間$(0,a)$で積分した以下の形になる。

$$T=\int_0^a \frac{n}{c}\sqrt{1+y'^2}dx$$

(3)媒質の屈折率が場所によらず一定の値$n_0$であるとき，すなわち，$n(x,y)=n_0$であるとき，汎関数$T$に極小値を与える関数$y=f(x)$を，問(1)の結果を用いて求めよ。

(4) 次に，屈折率が場所によって$n(x,y)=\dfrac{b}{y}$と変化する場合を考える。ここで，$b$は正の定数とする。汎関数$T$が極小値をとるとき，以下の微分方程式を満たすことを問(2)の結果を用いて示せ。

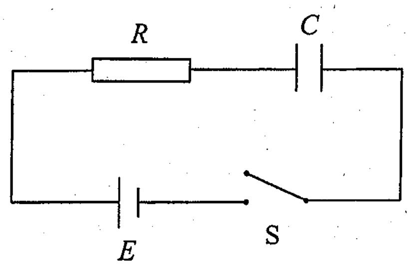
$$y'^2=\frac{r^2-y^2}{y^2}$$

ここで，$r$は問(2)で定義した定数$E$を用いて$r^2=\left(\dfrac{b}{cE}\right)^2$と表される定数である。

(5) 問(4)で与えられた微分方程式を解いて，$T$に極小値を与える関数$y=f(x)$を求めよ。また，2 点OA間を通過する光の経路を図示せよ。ただし，光の通る領域は$y>0$であるとする。

## [2]

図のように，起電力$E$の直流電源に抵抗$R$とコンデンサー$C$を直列に接続し，スイッチ S でオンオフできるとする。コンデンサーに電荷が蓄えられていない状態から，時刻$t=0$でスイッチを入れ，コンデンサーを充電する過程を考える。




(1) 時刻 $t$ でコンデンサーに蓄えられている電荷が $Q(t)$のとき，コンデンサーの両端の電位差を求めよ。

(2) 微小な時間$\Delta t$ の間に，コンデンサーに蓄えられている電荷が$\Delta Q$ だけ変化したとき，回路に流れる電流 $I$ はどのように表されるか。また，このとき抵抗 $R$ での電圧降下を表す式を書け。

(3) スイッチ S を入れ，コンデンサーに蓄えられている電荷が $Q(t)$のとき，この回路におけるキルヒホッフの第二法則を微分方程式として表せ。

(4) コンデンサーに蓄えられている電荷 $Q(t)$の時間変化を，問(3)の微分方程式を解いて求めよ。

(5) 問(4)の結果を用いて，回路を流れる電流 $I$ を求めよ。また，$I$ の時間変化を表す概略図を描け。

(6) 時刻$t=0$でスイッチを入れてから，コンデンサーが完全に充電されるまでに，抵抗 $R$ で消費される電力量 $W_1$ を求めよ。

(7) コンデンサーを完全に充電するのに直流電源がした仕事 $W_2$ を求めよ。

次に，スイッチを切ったあとコンデンサーを完全に放電させ，直流電源を角周波数$\omega$の交流電源に交換した後，スイッチを入れた。

(8) 交流起電力を $\tilde{E}(t)=\tilde{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$ と複素表示するとき，電流も $\tilde{I}(t)=\tilde{I}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$ と複素表示できる。このとき，複素インピーダンス $\tilde{Z}=\tilde{E}_0/\tilde{I}_0$ を $R$，$C$，$\omega$を用いて表せ。

# [3]

質量$m$，角振動数$\omega$の1次元調和振動子の量子力学を考える。系のハミルトニアン演算子は次式で与えられる。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 .$$

ここで，$\hat{x}$は座標演算子，$\hat{p}$は運動量演算子である。

今，系は基底状態にあり，波動関数

$$\psi(x) = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}a^2x^2\right),$$

で表されているとする。ここで，

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},$$

であり，プランク定数を$h$として$\hbar = h/(2\pi)$である。以下の問いに答えよ。

なお，必要ならば以下の積分公式を用いてよい。($c$は正の定数。)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-c^2x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{c},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-c^2x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c^3}.$$

(1) $\psi(x)$が規格化条件を満たすことを示せ。

(2) $\psi(x)$が従うシュレーディンガー方程式（エネルギー固有値方程式）を，$\psi(x)$に対する微分方程式として書き下せ。また，基底状態のエネルギー固有値$E$を求めよ。

(3) $\hat{x}$と$\hat{x}^2$の期待値$\langle\hat{x}\rangle$と$\langle\hat{x}^2\rangle$を求めよ。

(4) $\hat{p}$と$\hat{p}^2$の期待値$\langle\hat{p}\rangle$と$\langle\hat{p}^2\rangle$を求めよ。

(5) 座標と運動量の不確定さ$\Delta x$と$\Delta p$は

$$\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2},$$

で与えられる。積$\Delta x\Delta p$を求め，不確定性関係が満たされることを確認せよ。

[4]

$N$ 個の独立な粒子からなる系がある。各粒子はエネルギー $0$, $\varepsilon$ の 2 つの量子状態をとることができるとする。ここで, $\varepsilon > 0$とする。この系が温度 $T$ の熱浴と平衡状態にあるとして, カノニカル分布を用いて考えよう。

(1) この系の分配関数 $Z$ を示せ。ヘルムホルツの自由エネルギー$F$ を求めよ。

(2) この系のエントロピー$S$ を求めよ。

(3) この系の比熱 $C$ を求めよ。

(4) 横軸に温度 $T$ をとり, この系の比熱 $C$ の温度変化の概略図をかけ。

次に, 各粒子がエネルギー $0$, $p\varepsilon$, $\varepsilon$ の 3 つの量子状態をとることができるとする。ここで, $0 < p < 1$とする。

(5) エネルギーが $p\varepsilon$ である粒子の数の平均値$N_{p\varepsilon}$を求めよ。

(6) 低温, および, 高温の極限において, $N_{p\varepsilon}$はどのような値に近づくか。

(7) 以下の２つの場合に対して, 横軸に温度 $T$ をとり, $N_{p\varepsilon}$の温度変化の概略図を, 相違点が明らかになるようにそれぞれかけ。

(i) $0.5 \leq p < 1$ の場合

(ii) $0 < p < 0.5$ の場合