平成２４年度第２次募集

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

（専攻名）数理物質科学専攻

（試験実施単位名）物理学コース

（記号）A1

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で６ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

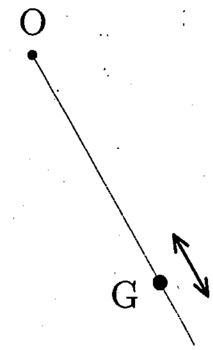
4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　試験時間は，９：００～１２：００の１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

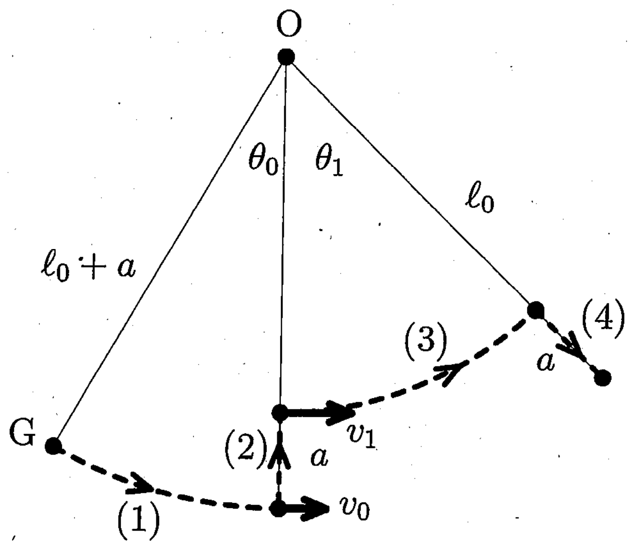
[1] ブランコをこぐ運動を観察すると，ブランコの振動にあわせて，こぎ手が重心を上下させていることがわかる。この運動を以下のような単純化した模型で考察しよう。

ブランコを一本の軽い棒とみなし，こぎ手の重心を質量 m のおもり G とみなした振り子を考える。おもりは棒に沿って移動できるものとする。つまり，支点方向の外力をおもりに加えることで，棒の支点 O からの距離 OG を自由に調整できるようになっている。



この模型において，おもりの位置を，振動面内にとった極座標 (r, θ) で表す。ただし，支点 O を原点とし，鉛直下向きを $\theta = 0$ する。重力加速度の大きさを g として，以下の設問に答えよ。

いま，おもり G を下の (1)〜(4) のように運動させた。



(1) 最初，OG 間の距離を $r = \ell_0 + a$ に固定し，振れ角が $\theta = -\theta_0$ $(0 < \theta_0 < \pi/2)$ の位置で，おもりを静かに離した。最下点でのおもりの速さ v_0 および力学的エネルギー E_0 を答えよ。ただし，最下点を位置エネルギーの基準とする。

(2) 振り子が最下点に来た瞬間に，OG 間の距離を ℓ_0 に変化させたところ，おもりの速さが v_1 になった。ただし，図のように，速度の方向は棒に垂直とする。このとき，変化直後の速さ v_1 を答えよ。また，変化前の最下点を位置エネルギーの基準として，変化後の力学的エネルギー E_1 を求めよ。

[注] OG 間の距離の変化は，十分短い時間に起こったものとし，おもりの（支点 O を中心とする）角運動量の変化は無視できるものとしてよい。

(3) その後，OG 間の距離を一定に保ったところ，振れ角が θ_1 $(0 < \theta_1 < \pi/2)$ の位置まで来た瞬間に静止した。$\cos\theta_1$ と $\cos\theta_0$ の関係を求めよ。

(4) 振れ角が θ_1 の位置に来た瞬間に OG 間の距離を $\ell_0 + a$ に戻したところ，変化の直後におもりは静止したままであった。変化直後における振り子の力学的エネルギー E_2 を求め，E_2 が E_0 の何倍になったかを答えよ。

今度は，振り子の運動を一般的に考えよう。おもりにかかる支点方向の外力 $F(t)$ を変化させることにより，OG 間の距離 r を条件 $r=\ell(t)$ に従って時間変化させる。この場合，おもりの運動を表すラグランジアンは，位置エネルギーの基準を支点 O として，

$$L\left(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta},\lambda\right) \;=\; \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr\cos\theta-\lambda\cdot\left[r-\ell(t)\right]$$

で与えられる。ここで，λ は拘束条件 $r=\ell(t)$ に対する未定乗数である。

(5) r および θ に対するラグランジュの方程式を書け。

(6) 前問の方程式から，この問題における未定乗数 λ は支点方向の外力 F に等しいことがわかる。外力の大きさ F を m，g，ℓ，$\dot{\ell}$，$\ddot{\ell}$，θ および $\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ。また，外力の表式を，おもりとともに運動する観測者の視点から解釈せよ。

[2]

（Ⅰ） ベクトル場 $E_x = 2ax(y+z)$，$E_y = a(x^2 - y^2)$，$E_z = a(x^2 - z^2)$ が与えられている。ただし a は定数とする。

(1) このベクトル場が，電荷のない真空中の静電場と見なせることを示せ。

（ヒント：ベクトル場の回転と発散から示すことが出来る。なお計算過程も書くこと。）

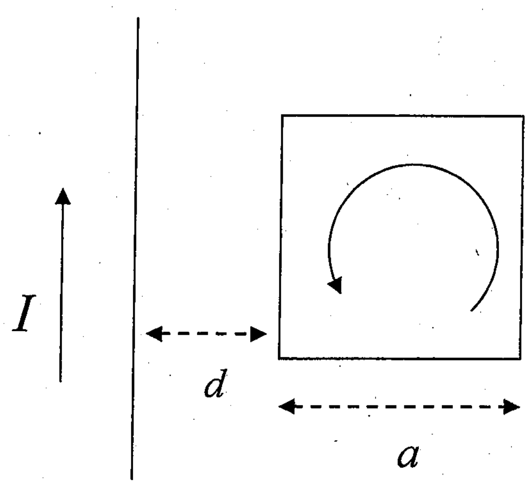
(2) この静電場のポテンシャルを求めよ。（基準点は原点とする。）

（Ⅱ）図に示すように，無限に長い直線状の導線から距離 d 離れて，一辺の長さ a の正方形の閉回路が置かれている。正方形の閉回路と直線状の導線は同じ平面上にあり，正方形の辺は直線状の導線と平行あるいは垂直の関係にある。直線状の導線には，図のように下から上に向かって直流電流 I が流れている。正方形の閉回路の抵抗を R，真空中の透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ。

(1) 直線状の導線から距離 x 離れた点における磁束密度の大きさを求めよ。

(2) 正方形回路を貫く磁束 Φ の大きさを求めよ。

(3) 直線状の導線に直流電流 I のかわりに低周波数の交流電流 $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ を流した。なお I_0，ω は定数である。正方形の閉回路に流れる電流を求めよ。ただし図中の矢印の向きに電流が流れた場合に電流の値を正とする。



[3]

1 次元調和振動子のエネルギー固有値は，量子力学によると，

$$\epsilon_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

となる。ここで h をプランク定数として $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ である。また，ω は調和振動子の角振動数である。

(1) 1 個の 1 次元調和振動子の分配関数 Z_1 が

$$Z_1 = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_BT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_BT}}}$$

になることを示せ。ここで k_B はボルツマン定数である。

(2) 分配関数 Z_1 の高温極限（$\hbar\omega \ll k_BT$）での関数形を求めよ。

次に角振動数 ω の 3 次元調和振動子が N 個ある系を考える。3 次元調和振動子は，振動の x，y，z の各成分がそれぞれ独立な 1 次元調和振動子とみなすことができる。また 3 次元調和振動子はたがいに区別できるとし，相互作用は無視する。

(3) この系の分配関数 Z を求めよ。

(4) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

(5) この系の内部エネルギー E を求めよ。

(6) この系の定積比熱 C_V を求めよ。

(7) 定積比熱 C_V の高温極限を求めよ。

[4]

球対称ポテンシャル $V(r)$ 中の質量 M の粒子の波動関数は, 次の時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解として与えられる。

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hat{\boldsymbol{l}}^2}{2Mr^2}+V(r)\right\}\psi(r,\theta,\phi)=E\psi(r,\theta,\phi)$$

ここで, (r,θ,ϕ) は原点を中心とする極座標である。ただし, h をプランク定数として $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ である。なお, $\hat{\boldsymbol{l}}=(\hat{l}_x,\hat{l}_y,\hat{l}_z)$ は角運動量演算子であり, 以下の交換関係を満たす。

$$[\hat{l}_x,\hat{l}_y]=i\hbar\hat{l}_z,\ \ [\hat{l}_y,\hat{l}_z]=i\hbar\hat{l}_x,\ \ [\hat{l}_z,\hat{l}_x]=i\hbar\hat{l}_y$$

(1) $\hat{\boldsymbol{l}}^2(=\hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2)$ と $\hat{l}_z$ が交換することを示せ。

(2) 波動関数を $\psi(r,\theta,\phi)=\dfrac{u(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi)$ とおいたとき, $u(r)$ の満たすべき方程式を書け。ただし, $Y_{lm}(\theta,\phi)$ は球面調和関数で, 次の関係式を満たす。

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2Y_{lm}(\theta,\phi)=l(l+1)\hbar^2Y_{lm}(\theta,\phi)$$
$$\hat{l}_zY_{lm}(\theta,\phi)=m\hbar Y_{lm}(\theta,\phi)$$

(3) $u(r)$ の $r=0$ での境界条件を書け。

(4) 次のポテンシャルに対して, $l=0$ の状態の固有エネルギーを求めよ。また, それぞれの固有状態の規格化された波動関数 $\psi(r,\theta,\phi)$ を求めよ。

$$V(r)=\begin{cases}0 & (r\le a)\\ \infty & (r>a)\end{cases}$$