平成２４年度第１次募集（平成２３年１０月入学含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

（専攻名）数理物質科学専攻

（試験実施単位名）物理学コース

（記号）A1

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で5ページある。

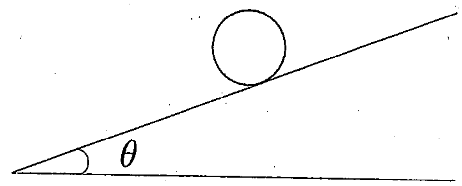
3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1] 図のように，半径 a の円柱が，中心軸を水平に保ったまま，斜面をすべることなく転がり落ちている。重力加速度の大きさを g とし，斜面が水平面となす角を θ，斜面と円柱の静止摩擦係数を μ とする。また，円柱の密度は一様であり，全質量を M，中心軸まわりの慣性モーメントを I とする。



円柱が斜面に沿って移動した距離を x，中心軸まわりに回転した角度を ϕ で表す。ただし，$x=0$ のとき $\phi=0$ とする。

(1) 円柱の並進運動のエネルギー $K_{\mathrm{T}}(\dot{x})$，回転運動のエネルギー $K_{\mathrm{R}}(\dot{\phi})$，および重力の位置エネルギー $V(x)$ のそれぞれを，x，ϕ およびそれらの時間微分 $\dot{x}$，$\dot{\phi}$ などを用いて表せ。ただし，位置エネルギーの原点を $x=0$ に選び，$V(0)=0$ とする。

円柱がすべることなく斜面を転がり落ちているとすると，$x=a\phi$ の関係が成り立つ。この拘束条件を考慮したラグランジアンは，

$$L\left(x,\dot{x},\phi,\dot{\phi},\lambda\right) \;=\; K_{\mathrm{T}}(\dot{x})+K_{\mathrm{R}}(\dot{\phi})-V(x)-\lambda\cdot\left(x-a\phi\right)$$

で与えられる。ここで，λ は未定乗数である。

(2) ラグランジュの方程式から，x および ϕ に対する運動方程式を導け。

(3) 問 (2) の運動方程式から，円柱を回転させようとする力のモーメントの大きさを未定乗数 λ などを用いて表せ。また，この問題における未定乗数 λ の物理的意味を答えよ。

(4) $x=a\phi$ の関係に注意して，回転の角加速度 $\ddot{\phi}$，並進の加速度 $\ddot{x}$ および未定乗数 λ を求めよ。

(5) 円柱がすべらずに転がるために $\tan\theta$ が満たすべき条件を答えよ。

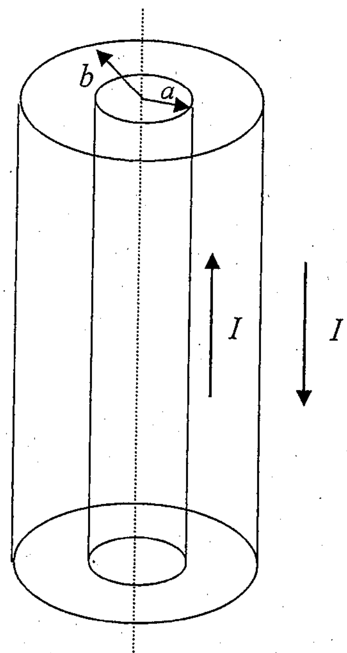
(6) 一様な円柱の場合と中空の円筒の場合では，どちらがゆっくり転がるか，理由をつけて答えよ。ただし，半径はともに a に等しいものとする。

[2]

（Ⅰ）　図のように，真空中に半径a,b（$a<b$）の二つの薄い円筒状の導体が，中心軸を一致させておかれている。これらに，同じ強さIの電流を軸方向に逆向きに流した。真空の透磁率をμ_0として以下の問いに答えよ。ただし円筒は十分長いものとする。

(1)　生じている磁束密度の大きさを求めよ。

(2)　軸方向の単位長さ当たりに蓄えられた磁場のエネルギーを求めよ。



（Ⅱ）　真空中に，以下のような球対称な電荷密度$\rho(r)$が存在する。

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0\left(1-\dfrac{r}{a}\right) & (0\le r\le a)\\ 0 & (a<r)\end{cases}$$

真空の誘電率をε_0として以下の問いに答えよ。

(1)　積分形のガウスの法則を用いて電場の大きさを求めよ。

(2)　無限遠方を基準点として静電ポテンシャルを求めよ。

(3)　全静電エネルギーを求めよ。

[3]

単原子分子からなる理想気体 1 および理想気体 2 が容器中に自由に動く仕切り壁で分離して閉じ込められており，圧力が等しくなっている。また，どちらの気体も温度 T の熱平衡状態にある。気体 1 と気体 2 は別種粒子で構成されており，気体 1 の分子質量，粒子数および体積は m_1, N_1, V_1 であり，気体 2 の分子質量，粒子数および体積は m_2, N_2, V_2 である。ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h として，以下の問いに答えよ。ただし，どの気体も古典統計にしたがうものとする。また，以下の計算では Stirling の公式

$$\log N! \simeq N \log N - N$$

を用いること。

(1) 気体 1 について，分配関数 Z_1 が $Z_1 = \dfrac{V_1^{N_1}}{N_1!\, h^{3N_1}}(2\pi m_1 k_{\mathrm{B}} T)^{\frac{3}{2}N_1}$ となることを示せ。なお，必要ならば次の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a \text{ は正の定数})$$

(2) 気体 1 について，ヘルムホルツの自由エネルギー F_1 を求めよ。

(3) 気体 1 および気体 2 のエントロピー S_1 および S_2 を求めよ。

容器の全体積と気体の温度を一定に保ったまま，仕切り壁を取り除いて 2 つの気体を混合させ，平衡状態に達した状態を考える。ただし，仕切り壁は十分薄くその体積は無視できる。

(4) 混合気体の分配関数 Z を求めよ。

(5) 混合気体のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

(6) 混合気体のエントロピー S を求め，$S_1 + S_2$ との差（混合のエントロピー）を求めよ。

気体 1 と気体 2 を構成する粒子が同種である場合について考える。仕切り壁を取り除いても気体の巨視的な状態は変化しないはずである。しかし (6) の結果をそのまま使うと，混合によりエントロピー変化が生じてしまい，矛盾である。

(7) 上記の矛盾を解消するためにはどのように考えるべきか考察せよ。

[4]

質量 m の粒子の運動を量子力学的に考える。まず, 粒子が x 軸上を運動する場合を考える。

(1) ポテンシャルが次のように与えられているとする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

このポテンシャル中の粒子に対する, $0 \leq x \leq a$ における時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

(2) 問 (1) のシュレディンガー方程式を解き, エネルギー固有値及び規格化された固有関数を求めよ。

(3) 摂動 $H'(x) = V_0(x - a/2)^2$ が加わったときの, 下から n 番目のエネルギー固有状態に対する1次の摂動エネルギー $E_n^{(1)} = \langle n|H'|n\rangle$ を求めよ。なお, 必要ならば以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^A t\sin^2 t dt = \frac{A^2}{4} + \frac{1-\cos(2A)}{8} - \frac{A\sin(2A)}{4}.$$
$$\int_0^A t^2\sin^2 t dt = \frac{A^3}{6} - \frac{A\cos(2A)}{4} + \frac{(1-2A^2)\sin(2A)}{8}.$$

次に, 粒子が (x, y) 平面内を運動する場合を考える。

(4) ポテンシャルが次のように与えられているとする。

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

このポテンシャル中の粒子に対する, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ における時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

(5) 問 (4) のシュレディンガー方程式を解き, エネルギー固有値を求めよ。

(6) 第一励起状態の縮退度を求めよ。

(7) 第一励起状態に対して摂動 $H'(x, y) = V_0(x - a/2)^2$ が加わると縮退が解ける。縮退が解けたそれぞれの状態に対して, 1次の摂動エネルギーを求めよ。